

# 全球外汇套利的识别指标 及可能的最优套汇路径

马明\*

**摘要** 本文将三角套汇识别推广到任意  $n$  种货币的套汇识别。 $n$  种货币之间的相互比价形成现实汇率矩阵  $A$ , 它的特征向量代表“虚拟金本位制度”下各种货币的含金量。由此构造出无套利基准汇率矩阵  $B$ ,  $A$  除以  $B$  得到评估矩阵  $C$ , 它表明各货币在各外汇市场上被低估或高估的程度, 据此即可获得最优套汇路径。

**关键词** 外汇套利, 套汇识别指标, 套汇路径

目前在众多全球性外汇市场中, 多种自由兑换货币随着外汇市场行情变化, 每时每刻都蕴蓄着套利机会。怎样在如此众多的外汇市场和如此繁多的币种之间迅速识别套汇机会并发现尽可能好的套汇路径?

尽管外汇市场已经实现了全球电子化交易, 但套汇识别理论仍然停留在20世纪70年代的水平。Levich (2001) 出版的国际金融理论前沿读本仍在继续使用三角套汇理论作为全球套汇理论, Bolland 和 Connor (1996) 运用系统工程理论, 采用卡尔曼滤波法来识别套汇机会, 蔡茂诚、邓小铁 (2003) 运用图论和复杂性算法来识别套利机会, 但由于上述后两种方法采用数值求解而不是给出显式分析解, 算法比较复杂。本文另辟蹊径, 研究运用矩阵分析理论, 提出了识别套利机会的显式分析解, 并将三角套汇模型扩大到任意  $n$  种货币之间的套汇模型。

## 一、汇率矩阵的最大特征值及对应 特征向量的金融学含义

在某一时点上, 全球外汇市场的若干种货币之间的汇率可以整理为如下

\* 马明, 南开大学经济学院。通讯地址: 北京市海淀区北太平庄路 35 号 302 号, 100088; 电话: 13911801972; E-mail: mark\_maming@hotmail.com。作者感谢王继祖、马君潞、Constantinides、姜波克、许少强、周春生、施建淮、贺立平、陈平、李仲飞、林桂军、王宇、包明友、张海鱼等人的意见和建议, 特别感谢匿名审稿人对本文提出的单调递增函数的建设性建议和选择无套利基准矩阵的改进意见。

的表格:

表1 汇率行情的矩阵形式

外汇市场 币种		1	2	3	4	5	6
		New York	Frankfurt	London	Tokyo	Hong Kong	Singapore
1	U. S. Dollar	1	1.1038	0.6888	1.1900	7.8000	1.8235
2	Euro	0.9050	1	0.6241	1.0955	7.0801	1.6403
3	Pound Sterling	1.4501	1.6026	1	1.7705	11.3200	2.6506
4	Yen(100)	0.8893	0.9099	0.5677	1	6.4300	1.4957
5	H. K. Dollar	0.1282	0.1414	0.0883	0.1555	1	0.2328
6	Singapore Dollar	0.5521	0.6098	0.3773	0.6681	4.3100	1

资料来源: Statistical Bulletins from the Federal Reserve, Bank of England, European Central Bank, Bank of Japan, the Monetary Authority of Hong Kong and the Monetary Authority of Singapore, December 2001.

上述的汇率行情可以表示为现实汇率矩阵  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1.1038 & 0.6888 & 1.1900 & 7.8000 & 1.8235 \\ 0.9050 & 1 & 0.6241 & 1.0955 & 7.0801 & 1.6403 \\ 1.4501 & 1.6026 & 1 & 1.7705 & 11.3200 & 2.6506 \\ 0.8893 & 0.9099 & 0.5677 & 1 & 6.4300 & 1.4957 \\ 0.1282 & 0.1414 & 0.0883 & 0.1555 & 1 & 0.2328 \\ 0.5521 & 0.6098 & 0.3773 & 0.6681 & 4.3100 & 1 \end{bmatrix}$$

可以看出, 现实汇率矩阵  $A$  是一种特殊矩阵, 它有以下的特点:

1. 所有元素都是正数, 即  $a_{ij} > 0$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .
2. 当  $i = j$  时, 对角线元素均为 1; 当  $i \neq j$  时,  $a_{ij} \approx 1/a_{ji}$ .

根据直接套汇的定义, 两种货币的汇率当满足  $a_{ij} \approx 1/a_{ji}$  时, 不存在直接套汇的机会。但当  $i \neq j$  时,  $a_{ij} \approx 1/a_{ji}$  表明现实汇率矩阵  $A$  存在直接套汇的机会。但是, 考虑到这种直接套汇机会在外汇市场上最容易被直接识别出来, 所以  $a_{ij} \approx 1/a_{ji}$  基本上是成立的。

3.  $a_{ij} \approx a_{ik}/a_{jk}$ , 即  $a_{ij} \times a_{jk} \approx a_{ik}$ , 对所有的  $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ .

根据三角套汇的定义, 当三种货币的汇率满足  $a_{ij} \times a_{jk} = a_{ik}$  时, 不存在三角套汇的机会。但  $a_{ij} \times a_{jk} \approx a_{ik}$ , 表明现实汇率矩阵  $A$  存在三角套汇的机会。

可以看出, 现实汇率矩阵  $A$  有以上三个特点, 那么它的最大特征值及对应的特征向量有何特点?

先从矩阵  $A$  的第一个特点出发, 即  $A$  是正矩阵。对任何一个正矩阵  $A > 0$ , 根据 Perron-Frobenius 定理, 它的最大特征值  $\lambda_{\max}$  及对应的特征向量有如下特征:

(1) 存在性。A 有一个最大的正的实数特征值  $\lambda_{\max}$  (也称为 Perron 特征根), 它的模大于其他各个特征值的模。

(2) 惟一性。 $\lambda_{\max}$  对应的特征向量  $G$  可以由正分量组成, 在本质上是惟一的。

$$(3) \min_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)^i}{x_i} \leq \lambda_{\max} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)^i}{x_i}.$$

这说明现实汇率矩阵 A 确实存在一个最大的正的实数特征值  $\lambda_{\max}$ , 它对应的特征向量  $G$  可以由正分量组成, 在本质上是惟一的。

再考虑到现实汇率矩阵 A 的第二个特点  $a_{ij} \approx 1/a_{ji}$  和第三个特点  $a_{ij} \times a_{jk} \approx a_{ik}$ , 我们将其中的“约等号”改为“等号”, 从而构造出理想矩阵 B。

由于现实矩阵 A 可以被视为理想矩阵 B 在微小范围内扰动后形成的矩阵, 先研究矩阵 B 的特点, 然后通过了解理想矩阵 B 的最大特征值及其特征向量, 从而进一步了解现实矩阵 A 的最大特征值及其特征向量的特点。

事实上, 矩阵 B 恰恰是严格金本位货币制度下的汇率矩阵。

在严格金本位制度下, 汇率是由任意两种货币的含金量的比率决定的。假设有  $n$  种货币, 每种货币的含金量为  $g_i$ , 于是形成含金量向量  $G = [g_1, g_2, \dots, g_i, \dots, g_n]^T$ 。

运用直接标价法, 第  $i$  种货币兑换成第  $j$  种货币的汇率是  $b_{ij} = g_i/g_j$ 。对所有的货币而言可构造出汇率矩阵  $B = \{b_{ij}\}$ :

$$B = \begin{bmatrix} \underline{g_1} & \underline{g_1} & \dots & \underline{g_1} \\ g_1 & g_2 & & g_n \\ \underline{g_2} & \underline{g_2} & \dots & \underline{g_2} \\ g_1 & g_2 & & g_n \\ & & & \\ \underline{g_n} & \underline{g_n} & \dots & \underline{g_n} \\ g_1 & g_2 & & g_n \end{bmatrix}.$$

矩阵 B 有以下特点:

1. 所有元素都是正数, 即  $b_{ij} > 0$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ 。
2. 当  $i = j$  时, 对角线元素均为 1; 当  $i \neq j$  时,  $b_{ij} = 1/b_{ji}$ , 表明不存在直接套汇的机会。
3.  $b_{ij} = b_{ik}/b_{jk}$ , 即  $b_{ij} \times b_{jk} = b_{ik}$ , 对所有的  $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ . 表明不存在三角套汇的机会。
4. 更进一步, 因为任何两种货币的汇率都是严格根据各自含金量的比率

得出的, 所以也不存在四角或多角的套汇机会。所以它就是无套汇基准矩阵 (arbitrage free benchmark)。

更准确地讲, 由于矩阵  $B$  是现实矩阵  $A$  滤除微小扰动项之后的理想矩阵, 它实际上就是现实汇率矩阵  $A$  的无套汇基准矩阵。

容易证明下式:

$$\begin{bmatrix} \underline{g_1} & \underline{g_1} & \dots & \underline{g_1} \\ g_1 & g_2 & & g_n \\ \underline{g_2} & \underline{g_2} & \dots & \underline{g_2} \\ g_1 & g_2 & & g_n \\ & & & \\ \underline{g_n} & \underline{g_n} & \dots & \underline{g_n} \\ g_1 & g_2 & & g_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix},$$

即  $BG = nG$ 。

矩阵  $B$  的特征值  $\lambda = n$ , 对应的特征向量为  $G$ 。可以进一步证明, 该特征值  $\lambda$  就是最大特征值  $\lambda_{\max} = n$ 。

5. 在无直接套利的前提下, 外汇无套利的充分条件是  $\lambda_{\max} = n$ 。

数学证明见附录 1。

如果汇率的决定仿照金本位货币制度下完全由各种货币的含金量的比值决定, 从理论上讲不存在套汇机会, 此时矩阵的最大特征值  $\lambda_{\max} = n$ , 而且它对应的特征向量  $G$  就是含金量向量。

## 二、识别套汇获利潜力大小的指标: API

如前所述, 由于现实汇率矩阵  $A$  只是相对于矩阵  $B$  有微小的扰动, 从而它的最大特征值  $\lambda_{\max(A)}$  可能偏离于  $n$ 。现实汇率矩阵  $A$  的最大特征值具有以下特点:

1. 在一般情况下, 最大特征值  $\lambda_{\max}$  近似于  $n$ , 而它的特征向量的元素都是正数。

2. 汇率矩阵套利潜力同  $|\lambda_{\max} - n| = 0$  是否成立有密切关系。数学证明见附录 2。

3. 在外汇市场上, 考虑到直接套汇机会在外汇市场上最容易直接被识出来, 所以  $a_{ij} = 1/a_{ji}$  基本上是成立的, 此时在无直接套利的前提下, 外汇无套利的必要条件是  $\lambda_{\max} = n$ , 此时  $\lambda_{\max} = n$  就一定意味着外汇市场无套利机会。

数学证明见附录 3。

4. 综上所述, 在无直接套利的前提下, 外汇无套利的充分必要条件是  $\lambda_{\max} = n$ 。

基于上述分析: 定义套汇获利潜力指标 (Arbitrage Potentiality Indicator, API):

$$API \equiv \frac{|\lambda_{\max} - n|}{n - 1}.$$

总而言之, API 反映了现实汇率矩阵偏离标准矩阵的程度, 进而反映套汇获利潜力的大小。

套汇收益率 AER 与 API 呈现单调递增的关系。API=0 表明不存在套汇机会, API>0 表明存在套汇机会, API 越大, 表明套汇收益越高。套汇收益率 AER 与 API 的一般函数关系为

$$AER = f(API).$$

当  $n = 2$  时, 即对于两种货币和两个外汇市场上的套利活动, AER 与 API 之间呈现显式单调递增函数关系, 具体公式为:

$$AER = 2 \times API.$$

数学证明见附录 4。

表 2 一个最简单的套汇例子

	伦敦	纽约
英镑 (£)	1	2.0
美元 (\$)	0.5	1

先通过一个简单的例子来验证一下。假设在伦敦  $\text{£} / \$ = 0.5$ , 而在纽约  $\$ / \text{£} = 2.0$ , 如表 2 所示, 通过计算得,  $\lambda_{\max} = 2$ ,  $API = 0$ , 表明不存在套汇机会, 很容易验证这一点。在纽约, 如果  $\$ / \text{£}$  上升为 2.1, 那么  $\lambda_{\max} = 2.025$ ,  $API = 0.025 = 2.5\% > 0$ , 表明套汇机会出现了。一个套利者在伦敦以 200 万 \$ 购买 100 万 £, 然后在纽约卖得 210 万 \$, 赚得 10 万 \$ 或者 5% 的收益。如果  $\$ / \text{£}$  上升为 2.2, 那么  $\lambda_{\max} = 2.05$ ,  $API = 0.05 = 5\%$ , API 变得更大, 表明套利收益更大。此时的收益为 20 万 \$ 或者收益率为 10%。这也验证了在两种货币两个市场情形下  $AER = 2 \times API$ 。

这只是一个示意性的例子, 事实上套汇收益率远远小于上例中的收益率,

一般只有几个基点。但是这个例子的确验证了二维情形下 API 与套汇收益率 AER 的关系。

### 三、无套利的基准汇率矩阵、相对币值矩阵及可能最优的套汇路径

以表 1 为例, 矩阵最大特征值的结果计算如下:

$$\lambda_{\max} = 6.011648,$$

$$\text{API} = 0.002330,$$

API > 0 表明存在套汇机会。

特征向量  $G = [2.04788, 1.85830, 2.98511, 1.71427, 0.26318, 1.13127]^T$ ,

由于  $\lambda_{\max}$  对应特征向量的各分量被视为各货币的虚拟含金量, 可以用这些虚拟含金量集仿照金本位制度下汇率决定的规则, 构造出无套利基准汇率矩阵如下:

$$B = \{b_{ij} = g_i / g_j\}.$$

表 3 无套利基准汇率矩阵 B

Location		1	2	3	4	5	6
		New York	Frankfurt	London	Tokyo	Hong Kong	Singapore
1	U.S. Dollar	1	1.01200	0.68601	1.19461	7.78101	1.81022
2	Euro	0.90744	1	0.62252	1.08404	7.06083	1.64267
3	Pound Sterling	1.45770	1.60638	1	1.74138	11.34237	2.63875
4	Yen(100)	0.83709	0.92247	0.57426	1	6.51343	1.51532
5	H.K. Dollar	0.12852	0.14163	0.08816	0.15353	1	0.23265
6	Singapore Dollar	0.55242	0.60877	0.37897	0.65993	4.29838	1

将事实的汇率矩阵 A 除以标准币值矩阵 B, 得出相对币值矩阵 C:

表 4 相对币值矩阵 C

Location		1	2	3	4	5	6
		New York	Frankfurt	London	Tokyo	Hong Kong	Singapore
1	U.S. Dollar	1	1.0016	1.0041	0.9961	1.0024	1.0073
2	Euro	0.9973□	1	1.0025	1.0106	1.0027	0.9986
3	Pound Sterling	0.9948	0.9976	1	1.0167	0.9980	1.0045
4	Yen(100)	1.0623▽	0.9864△	0.9887	1	0.9872	0.9870
5	H.K. Dollar	0.9976	0.9987	1.0017	1.0130	1	1.0007
6	Singapore Dollar	0.9994	1.0016	0.9955	1.0124	1.0027	1

在矩阵  $C$  中, 元素  $c_{ij} < 1$  表示货币  $i$  的币值在市场  $j$  上被低估, 即将在市场买入力量拉动下上涨, 用  $\Delta$  表示;  $c_{ij} = 1$  表示恰如其分地被适估,  $c_{ij} > 1$  表示被高估, 即将在市场抛售力量推动下下跌, 用  $\nabla$  表示。

套汇获利要求买入最低估的货币, 再卖出最高估的货币, 从中赚取最大的汇差。对相对币值矩阵  $C$  进行观察, 第 4 行的第 2 列为最低估, 有升值潜力, 用“ $\Delta$ ”标出, 而第 4 行的第 1 列为最高估, 有贬值压力, 用“ $\nabla$ ”标出。显然, 它们位于同一列, 属于同种货币, 套汇路径是三角套汇。过渡元素在第 2 行第 1 列。用“ $\square$ ”标出。

与现实矩阵  $A$  对照, 表明日元在法兰克福为最低估, 而日元在纽约为最高估, 搭桥货币是欧元。一个套利者在法兰克福借入欧元买入日元, 在纽约卖掉换为美元, 再在此地买入欧元还债。最终的套利收益率  $AER = 1/0.9864 \times 1.0623/0.9973 - 1 = 0.07986 = 7.986\%$ 。

## 四、套汇曲面

上述从数理角度阐述了汇率矩阵的最大特征值及其特征向量的金融学含义及具体的实施步骤。为了更直观地利用汇率矩阵识别套利途径, 还可将相对币值评估矩阵  $C$  可视化, 形成图 1 的套汇曲面图。

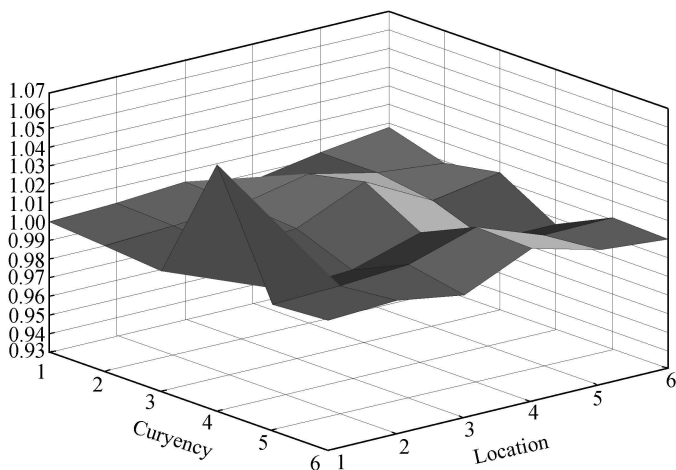


图 1 套汇曲面

图中凸出的点为被高估的货币及其所在的市场, 凹陷的点为被低估的货币及其所在的市场, 可能最优的套汇路径一目了然。直观地讲, 曲面越起伏不平, 套利收益率越高。如果套利曲面蜕化为纯平面, 则套利机会消失。

## 五、无套利基准矩阵的选择及一个猜想

但值得注意的是,由于虚拟含金量向量是一种理想的状态,据此构造出的无套利矩阵  $B$  和比较价值矩阵  $C$  对套利操作具有明显的指导意义,能发现可能最优的套利路径,但相对于现实最优的外汇套利路径交易而言,可能存在一定的偏差,主要是因为通过虚拟含金量向量构造出来的无套利矩阵并不是严格基于“外汇市场”的平面,但是在现实中,套利是在不同的具体的外汇市场之间进行的。

事实上,在现实的外汇交易中,可以按照上述方法,以某个主流的外汇市场的汇率向量为基础,也可以构造出无套利矩阵作为基准矩阵,从而发现基于外汇市场的最优套利路径。比如,在上例中以纽约外汇市场的汇率向量为基础,构造出无套利基准矩阵并计算出相对价值评估矩阵,最优的套利路径是:套利者在东京借入英镑,并换成日元,然后到纽约将日元卖掉换成美元,然后在此地买入英镑还债,计算过程是:  $1.7705 \times 0.8893 / 1.4501 = 1.08579$ ,即套利收益率为 8.579%,它比表 4 中发现的套利收益率 7.986% 有所提高。

当然,各个外汇市场上的套利者可以分别以各个子外汇分市场的汇率向量作为基础,构造出各自的无套利基准矩阵并发现相应的最优套利路径进行套利交易。我们发现,以纽约、伦敦等各个子外汇市场分别构造无套利基准矩阵和计算各个相对价值评估矩阵,把这些价值评估矩阵加总再简单进行算术平均的结果,与运用特征向量方法计算出的价值评估矩阵的结果非常接近。这就是说,运用特征向量方法所得出的套利路径大体相当于从各个外汇市场角度去实现最优套利路径的统计平均值,也就是说,各自最优套利路径叠加后形成的总体最优的套利路径,大体相当于特征向量方法所得出的套利路径,有一点猜测就是,特征向量方法所得出的套利路径是各子外汇市场最优套利路径的统计均值意义上的全局性最优套利路径。

附录 1 在无直接套利的前提下,现实汇率矩阵  $A$  无套利的充分条件是

$$\lambda_{\max} = n$$

对矩阵  $A$ , 设  $\lambda_{\max}$  对应的特征向量  $G = [g_1, g_2, \dots, g_j, \dots, g_n]^T$ ,



构造矩阵  $B = \{b_{ij} = g_i/g_j\}$ ;

在现实外汇市场中, 现实汇率矩阵  $A$  并不是严格按照理想矩阵  $B$  运行的, 而是相对于  $B$  有微小的扰动。

定义这个扰动矩阵为  $C$ : (根据本定义, 这个扰动矩阵  $C$  恰恰是价值评估矩阵)

定义扰动系数

$$c_{ij} = a_{ij}/b_{ij}, \quad \text{其中: 当 } i = j \text{ 时 } c_{ij} \equiv 1, \text{ 而当 } i \neq j \text{ 时 } c_{ij} \approx 1. \quad (1)$$

根据 Perron-Frobenius 定理, 对矩阵  $A$ ,  $\lambda_{\max}$  对应的特征向量的第  $i$  个分量等于:

$$(AG)_i = \lambda_{\max} g_i,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} g_j = \lambda_{\max} g_i,$$

$$\lambda_{\max} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{g_j}{g_i}.$$

将上述  $n$  行加总得:

$$n\lambda_{\max} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{g_j}{g_i} = n + \sum_{i \neq j} a_{ij} \frac{g_j}{g_i},$$

$$n\lambda_{\max} = n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( a_{ij} \frac{g_j}{g_i} + a_{ji} \frac{g_i}{g_j} \right).$$

根据公式 (1), 将  $a_{ij} = \frac{g_i}{g_j} c_{ij}$  代入上式得到:

$$n\lambda_{\max} - n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} [c_{ij} + c_{ji}]. \quad (2)$$

(2) 式表明  $\lambda_{\max}$  与扰动系数  $c_{ij}$  密切相关。

如果现实汇率矩阵  $A$  对矩阵  $B$  没有任何扰动, 那么对所有  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $c_{ij} = 1$  此时意味着  $A$  和  $B$  是完全相同的。此时

$$n\lambda_{\max} - n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} [1 + 1] = n^2 - n,$$

即  $\lambda_{\max} = n$ 。

也就是说, 当现实汇率矩阵  $A$  相对于理想矩阵  $B$  没有任何扰动时,  $A$  和  $B$  是相同的, 它们的最大特征值  $\lambda_{\max} = n$ 。

这说明, 在无直接套利的前提下, 现实汇率矩阵  $A$  无套利的充分条件是  $\lambda_{\max} = n$ 。

## 附录 2 汇率误估系数 $\delta_{ij}$ 与 $|\lambda_{\max} - n|$ 的关系

下面具体分析相对币值矩阵  $C$  中汇率误估系数  $\delta_{ij}$  与  $|\lambda_{\max} - n|$  的关系。

在 (1) 式中,  $c_{ij} * c_{ji} \approx 1$  对所有  $i \neq j$ ,

令  $c_{ij} * c_{ji} = 1 + \epsilon_{ij}$ , 其中当  $i \neq j$  时,  $\epsilon_{ij}$  是极小的正数或负数. (3)

根据 (2) 和 (3),

$$n\lambda_{\max} - n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[ c_{ij} + \frac{1}{c_{ij}} \right] + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[ \frac{\epsilon_{ij}}{c_{ij}} \right].$$

令  $c_{ij} = 1 + \delta_{ij}$ ,

其中  $\delta_{ij}$  表示 A 相对于 B 的误估的程度 ( $\delta_{ij} > 0$  为高估,  $\delta_{ij} < 0$  为低估)。

$$\text{其中 } \delta_{ij} > -1, \quad (4)$$

得到

$$\lambda_{\max} - n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[ \frac{\delta_{ij}^2}{1 + \delta_{ij}} \right] + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[ \frac{\epsilon_{ij}}{c_{ij}} \right]. \quad (5)$$

在一般情况下,  $\epsilon_{ij} \neq 0$ , 从 (3) 和 (4) 得到  $\epsilon_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{1 + \delta_{ij}} + \delta_{ji}$ , 代入 (5), 得到

$$\lambda_{\max} - n = \frac{1}{n} \left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[ \frac{\delta_{ij}^2 + \delta_{ji}}{1 + \delta_{ij}} \right] + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[ \frac{\delta_{ij}}{(1 + \delta_{ij})^2} \right] \right). \quad (6)$$

该式表明  $\lambda_{\max}$  与汇率误估系数  $\delta_{ij}$  彼此密切相关。

由于  $\delta_{ij}$  反映现实汇率矩阵 A 对无套利基准矩阵 B 的高估或低估的程度, 只要  $\delta_{ij}$  稍偏离于 0, 那么  $|\lambda_{\max} - n|$  就偏离于 0, 所以  $\text{API} \equiv |\lambda_{\max} - n| / (n - 1)$  能将套汇获利机会的大小很好地反映出来。

附录 3 在无直接套利的前提下, 现实汇率矩阵 A 无套利的必要条件是

$$\lambda_{\max} = n$$

在外汇市场上, 考虑到直接套汇机会在外汇市场上最容易直接被识别出来, 所以现实汇率矩阵 A 基本上不存在直接套汇机会, 即  $a_{ij} = 1/a_{ji}$  基本上是成立的, 此时  $\lambda_{\max} = n$  是外汇无套利的必要条件。

证明如下:

当现实汇率矩阵 A 不存在直接套汇机会时, 即  $a_{ij} = 1/a_{ji}$  时,

易知  $c_{ij} = a_{ij}/b_{ij} = a_{ij}/(g_i/g_j) = (1/a_{ji}) / (1/(g_j/g_i)) = 1/(a_{ji}/b_{ji}) = 1/c_{ji}$ ,

即  $c_{ij} = 1/c_{ji}$ ,

从 (3) 式知  $\epsilon_{ij} = 0$ , 将此代入 (6) 式, 有

$$\lambda_{\max} - n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[ \frac{\delta_{ij}^2}{1 + \delta_{ij}} \right]. \quad (7)$$

它表明:

$\lambda_{\max} = n$  时当且仅当  $\delta_{ij} \equiv 0$  (或  $c_{ij} = 1$ ) 对所有  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

附录 4 两种货币、两个市场情形下, AER 和 API 具有显式的单调递增函数关系

$$\text{令 } A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{bmatrix}.$$

得到  $\lambda_{\max} = 1 + \sqrt{a_{12}a_{21}}$ , 即

$$\text{API} = |\sqrt{a_{12}a_{21}} - 1|. \quad (8)$$

如果  $a_{12}a_{21} \neq 1$ , 先假设  $a_{12}a_{21} = 1 + \epsilon$ , 其中  $\epsilon$  是很小的正数.

显然套汇收益率  $\text{AER} = \epsilon$ ,

由于

$$\text{API} = |\sqrt{1 + \epsilon} - 1| \approx \epsilon/2.$$

也就是说

$$\text{AER} = 2 \times \text{API}. \quad (9)$$

当  $\epsilon$  是很小的负数时, 套利路径恰好相反, 但 (9) 式同样成立.

## 参 考 文 献

- [1] Bolland, P. J. and J. T. Connor, "A Robust Non-Linear Multivariate Kalman Filter for Arbitrage Identification in High Frequency Data", in *Neural Networks in Financial Engineering* (Proceedings of the NNCM-95), eds. A-P. N. Refenes, Y. Abu-Mostafa, J. Moody and A. S. Weigend (World Scientific), 1996, pp.122—135.
- [2] Cai, Mao-cheng and Xiaotie Deng, "Arbitrage in Frictional Foreign Exchange Market", *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 2003, Vol. 78, Elsevier.
- [3] Levich, Richard M., *International Financial Markets: Prices and Policies*. McGraw-Hill Higher Education, 2001.
- [4] Rao, C. Radhakrishna and M. Bhaskara Rao, *Matrix Algebra and its Applicatios to Statistics and Econometrics*. World Scientific Publishing Co. Ltd., River Edge, NJ, 1998.
- [5] Saaty, T. L., *The Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill, New York, 1980.

# Generalized Foreign Exchange Arbitrage: An Indicator and a Possible Optimal Arbitrage Path

MING MA  
(Nankai University)

**Abstract** The traditional identification method of triangular arbitrage is generalized to that

of arbitrary  $n$  currency arbitrage. The eigenvector of the matrix  $A$  of exchange rates implies the “virtual gold pars” for currencies. Then the arbitrage-free benchmark matrix  $B$  is constructed.  $C = A/B$  reveals measures the deviation of each currency from its benchmark value in each market, thus indicates the possibly optimal arbitrage path.

**JEL Classification** F31, F37, G15