

北京大学国家发展研究院 2017 年双学位校外项目
入学考试数学试题

(共十二道大题, 满分 100 分。注意把解答写在答题纸上, 注明题号, 填空题可直接写结果, 也可写过程与结果)

考号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____ 2017 年 5 月 20 日

一、填空题, 每小题 2 分, 共 10 分

(1) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, 则 $(A^*)^{-1} + (A^{-1})^*$ = _____, A^* 表示 A 的伴随矩阵。

(2) 给定对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则二次型 $X^T A X$ 的正惯性指数 = _____。

(3) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩 = _____。

(4) 若 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $a + b =$ _____。

(5) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵 _____。

二、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

(1) 求齐次方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系。(5 分)

(2) 求非齐次方程组 $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的所有解。(5 分)

三、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 求上三角矩阵 B 和正交矩阵 C , 使得 $AB = C$ 。(10 分)

四、设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 。

(1) 求 a, b 。(2分)

(2) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵。(6分)

(3) 求 $P^{-1}A^4P$ 。(2分)

五、 设 $f(x) = \arcsin x, \arcsin x = xf'(\eta)$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \ln^2(1+x)}{\eta^4}$ 。(5分)

六、 确定常数 A, B, C , 使得 $\cos x = \frac{1+Ax+o(x^3)}{1+Bx+Cx^2}$, 其中 $o(x^3)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小量。

(5分)

七、 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在第一象限中的点, 使得在该点的切线被坐标轴截得的线段最短。(5分)

八、 设 $f(u, v)$ 具有连续二阶偏导数, 并且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$, 又 $g(x, y) = f(e^x \cos y, e^x \sin y)$, 求

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}.$$

(5分)

九、 求下列定积分、二重积分

(1) $\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{x^3 dx}{1 + \cos 2x^2}$ 。(5分)

(2) $\iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + y^3) dx dy,$

D 是 xy 平面上的曲线 $(x-1)^2 + y^2 = 1, (x-2)^2 + y^2 = 4$ 和直线 $y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ 所围的区域。(5分)

十、 解微分方程:

(1) $(1+x^2)y' + 2xy = 4x^3, y(0) = 1$ 。(5分)

(2) $(y^2 - 3xy - 2x^2)dx = (x^2 - xy)dy$ 。(5分)

十一、 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} (x-4)^n$ 的收敛半径、收敛区域以及和函数。(10分)

十二、 证明: 实系数方程 $x^4 = 6x^2 + 4qx$ 有四个不同实根的充要条件为: $0 < |q| < \sqrt{2}$ 。(10分)